НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРОБЛЕМ РЕЄСТРАЦІЇ ІНФОРМАЦІЇ

НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ
ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

СУКАЛО АЛІНА СЕРГІЇВНА

УДК 004.94

МЕТОДИ МОДЕЛЮВАННЯ ЗАДАЧ ЦИФРОВОЇ ОБРОБКИ СИГНАЛІВ ЗАСОБАМИ ГІПЕРКОМПЛЕКСНИХ ОБЧИСЛЕНЬ

Спеціальність 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи

АВТОРЕФЕРАТ
дисертації на здобуття наукового ступеня
кандидата технічних наук

Київ – 2019

Дисертацією є рукопис

Робота виконана у відділі спеціалізованих засобів моделювання Інституту проблем реєстрації інформації Національної академії наук України

Науковий керівник: доктор технічних наук, старший науковий співробітник
Каліновський Яків Олександрович,
Інститут проблем реєстрації інформації НАН України,
старший науковий співробітник відділу
спеціалізованих засобів моделювання.

Офіційні опоненти: доктор технічних наук, старший науковий співробітник
Винничук Степан Дмитрович,
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г.Є. Пухова
НАН України,
завідувач відділу моделювання енергетичних процесів і систем,

доктор технічних наук, доцент
Молодецька Катерина Валеріївна,
Житомирський національний агроекологічний університет,
керівник навчально-наукового центру інформаційних
технологій.

Захист відбудеться « 21 » жовтня 2019 р. в ауд. 516-18 о 14:30 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради *Д 26.002.02* у Національному технічному університеті України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» за адресою: 03056, м. Київ, пр. Перемоги, 37.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського» за адресою: 03056, м. Київ, пр. Перемоги, 37.

Автореферат розісланий «___» вересня 2019 р.

Учений секретар
спеціалізованої вченої ради М. М. Орлова

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Бурхливий розвиток інформаційних технологій сприяє розширенню кола задач, які вирішуються методами математичного моделювання. Це, в свою чергу, призводить до необхідності удосконалення існуючих і розробки нових таких методів. Однією з основних компонент математичного моделювання є форма представлення інформації, вибір якої під час вирішення конкретної задачі сам по собі являється складною задачею. Питання форми представлення інформації тісно пов’язане з розвитком систем числення.

Застосування комплексних чисел для вирішення практичних задач дало відчутні результати, це стало причиною пошуку числових систем вищих вимірностей, зокрема третьої та четвертої. Представлення інформації за допомогою гіперкомплексних числових систем (ГЧС) має декілька переваг, які дозволяють підвищити ефективність моделювання. Що обумовлено тим, що ГЧС мають такі властивості, яких немає у традиційних систем представлення інформації, що дає можливість виконання всіх арифметичних операцій та різноманітних нелінійних перетворень з гіперкомплексними числами. Це призводить до збільшення застосування гіперкомплексних числових систем на сучасному етапі розвитку математичного моделювання та комп’ютерних обчислень. До того ж, деякі математичні твердження набувають значно простішого вигляду або значно легше доводяться, якщо записати їх мовою дій над кватерніонами чи іншими гіперкомплексними числами.

Математичне моделювання задач цифрової обробки сигналів із представленням даних в гіперкомплексному вигляді дозволяє зменшити обчислювальну складність таких задач. Зокрема, якщо ж розглядати передавальну функцію з квадриплексними коефіцієнтами і згідно з підходом до зменшення складності таких фільтрів, виконати ізоморфний перехід до бікомплексних коефіцієнтів, то всі арифметичні операції будуть вже виконуватися за правилами бікомплексної системи, для якої вони значно простіші.

Таким чином, зменшити обчислювальну складність математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів можна за допомогою підходу, що ґрунтується на властивостях ізоморфного переходу між різними ГЧС. Виконання нелінійних операцій над гіперкомплексними числами за допомогою переходу від ГЧС із сильнозаповненою таблицею множення базисних елементів до ізоморфної їй ГЧС, таблиця множення базисних елементів якої є слабозаповненою, виконання операцій в ній, і зворотного переходу значно зменшує кількість необхідних дійсних операцій, особливо множення.

Робота з гіперкомплексні даними як в чисельному, так і символьному вигляді, ускладнюється громіздкістю одержуваних виразів, особливо при використанні ГЧС великих вимірностей. Сучасні системи комп'ютерної алгебри (СКА) полегшують синтез математичних моделей.

Оскільки ні в Україні, ні за кордоном не існує засобів для оперування з довільними гіперкомплексними числовими системами, тому доцільно розробити програмний комплекс гіперкомплексних обчислень, який значно полегшить роботу з гіперкомплексними виразами.

З вищесказаного випливає, що ГЧС – це сучасний апарат представлення даних в математичному моделюванні. Це обумовлює актуальність вибраного напрямку робіт і перспективність теоретичних та практичних досліджень, що пояснює вибір теми дисертаційної роботи.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дисертаційна робота виконувалася в рамках робіт Відділу спеціалізованих засобів моделювання Інституту проблем реєстрації інформації Національної Академії наук України, до яких відносяться:

- науково-дослідна тема «ГІПЕРНЕТ» - «Розробка теоретичних засад моделювання інформаційних мереж на базі методології інформаційного пошуку та гіперкомплексних числових систем» (реєстраційний номер 0113U001106), 2013-2015 рр.;
- науково-дослідна тема «НАВІГАТОР» - «Розробка та дослідження моделі предметних областей при формуванні баз знань і забезпеченні семантичного пошуку» (реєстраційний номер 0116U000507), 2016-2020 рр.

Мета і задачі дослідження. *Метою дослідження* є підвищення ефективності математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів методами та засобами обробки гіперкомплексних даних.

Для досягнення поставленої мети вирішуються наступні задачі.

1. Проаналізувати сучасний стан математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів, сформулювати вимоги до засобів їх реалізації, та з позицій цих вимог проаналізувати методи побудови гіперкомплексних числових систем і дослідити їх основні характеристики.
2. Побудувати класи гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності шляхом застосування процедури подвоєння.
3. Дослідити алгебраїчні властивості класів ГЧС з точки зору їх застосування при вирішенні задач цифрової обробки сигналів.
4. Побудувати узагальнені моделі експоненціальної, тригонометричних та гіперболічних функцій в одержаних класах ГЧС для прискорення процесу моделювання на етапі проектування.

5. Побудувати за допомогою ГЧС математичні моделі задач цифрової обробки сигналів кращої якості порівняно з традиційними.
6. Розробити структуру та модулі програмного комплексу гіперкомплексних обчислень і провести аналіз його ефективності.
7. Реалізувати за допомогою комплексу гіперкомплексних обчислень математичні моделі задач цифрової обробки сигналів.

Об'єктом дослідження є процес математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів засобами гіперкомплексних обчислень.

Предметом дослідження є моделі задач згортки масивів різної вимірності та синтезу структури цифрових фільтрів.

Методи дослідження основані на лінійній і загальній алгебрі, теорії груп та алгебр, теорії функцій комплексної змінної, теорії диференціальних рівнянь, методах дискретної математики.

Наукова новизна одержаних результатів. У рамках дисертаційного дослідження запропоновано концепцію і методологічні принципи представлення та обробки інформації в гіперкомплексному вигляді, які орієнтовані на використання в математичному моделюванні та комп'ютерних обчисленнях. Отримані такі результати, що істотно розширюють представлення про гіперкомплексні числові системи і можливості їх використання для побудови математичних моделей задач цифрової обробки сигналів.

1. Вперше побудовано на основі використання принципу подвоєння Грасмана-Кліфорда широкий клас комутативних і некомутативних ГЧС, використання яких при математичному моделюванні складних об'єктів багатовимірної природи дозволяє підвищити їх адекватність та розширити область застосування цих ГЧС.
2. Вперше запропоновано узагальнену структуру та організацію арифметичних і алгебраїчних операцій для класів ГЧС четвертої вимірності, що дозволяє прискорити процес синтезу задач цифрової обробки сигналів.
3. Вперше для побудованих класів ГЧС запропоновано узагальнені представлення експоненціальної, логарифмічної, тригонометричних та гіперболічних функцій від гіперкомплексної змінної, використання яких дозволяє зменшити обчислювальну складність реалізації цих функцій в порівнянні з прямими методами.
4. Вперше розроблено принципи використання ГЧС для синтезу схем обчислень при вирішенні задач цифрової обробки сигналів, що дає можливість зменшення об'ємів обчислень.

Практичне значення одержаних результатів полягає в створенні передумов підвищення ефективності математичного моделювання вирішення задач цифрової обробки сигналів на базі використання гіперкомплексних числових систем.

Практичне значення мають наступні результати.

1. Аналітичні представлення норм, спряжених чисел, одиничних елементів, дільників нуля та обернених чисел в комутативних і некомутативних гіперкомплексних числових системах четвертої вимірності, які використовуються при створенні математичних моделей, зокрема ефективних моделей цифрової обробки сигналів.
2. Модифікація виконання складних операцій в системах, у яких параметри можуть бути дільниками нуля, що забезпечує коректність комп'ютерних обчислень при побудові математичних моделей з використанням ГЧС.
3. Комплекс програмних засобів для числових та аналітичних обчислень в різних ГЧС, використання якого значно спрощує процес розробки математичних моделей, в яких використовуються ГЧС.
4. Математичні моделі обчислення компонентів лінійної згортки масивів різних вимірностей, використання в яких гіперкомплексного представлення даних дозволяє зменшити кількість операцій порівняно з існуючими моделями.
5. Структури реверсивних цифрових фільтрів з гіперкомплексними параметрами, що дозволяють оптимізувати характеристики фільтрів по чутливості.

Особистий внесок здобувача полягає в теоретичному обгрунтуванні отриманих результатів, які перевірені на великій кількості прикладів. Всі наукові результати дисертації отримані автором самостійно.

В роботах, опублікованих у співавторстві, здобувачу належить:

[1] – застосування процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда для побудови нових класів ГЧС четвертої вимірності;

[2, 14, 22] – програмне наповнення підсистеми визначення алгебраїчних характеристик пакету гіперкомплексних обчислень;

[3, 7, 12] – встановлення зв’язків між узагальненими кватерніонами та процедурою подвоєння Грасмана-Кліфорда;

[4, 9] – моделювання представлення експоненти і логарифма;

[5, 15, 7] – аналіз алгоритму виконання процедури подвоєння ГЧС;

[6, 16] – побудова графіків амплітуд компонент тригонометричних і гіперболічних нелінійностей;

[8] – аналіз властивостей системи антикватерніонів;

[10, 24] – виділення властивостей узагальнених кватерніонів, корисних для застосувань в цифрових підписах;

[11] – синтезовано матричні представлення узагальнених кватерніонів шляхом використання матриць другого порядку;

[13] – обчислення по дослідженню представлення норми, спряжених чисел та дільників нуля в узагальнених ГЧС четвертої вимірності;

[19 – 21] – показано переваги застосування програмного комплексу гіперкомплексних обчислень для моделювання задач;

[25] – дослідження обчислювальні властивості некомутативного класу ГЧС четвертої вимірності;

[27] – дослідження систем ізоморфних комплексним, подвійним та дуальним числам;

Апробація результатів дисертації. Основні результати дисертаційної роботи були представлені та обговорювались на таких конференціях:

- щорічні підсумкові конференції ІПРІ НАН України, Київ (2014, 2015, 2017 рр.);
- 16-а ÷ 20-а Міжнародна науково-технічна конференція «Системний аналіз та інформаційні технології» SAIT 2014, Київ (2014 - 2018 рр.);
- науковий семінар Житомирського державного університету імені Івана Франка, Житомир (2018);
- 5–а Міжнародна науково-практична конференція «Глобальні та регіональні проблеми інформатизації в суспільстві і природокористуванні ‘2017», НУБіП України, Київ, 22-23 червня 2017 р.
- Міжнародна наукова конференція «Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій», Рівне, 02-04 березня 2018 р;
- науковий семінар кафедри комп'ютерних наук Національного університету водного господарства та природокористування, Рівне, 2018 р.

В 2017 році Сукало А.С. призначена стипендія Національної академії наук України для молодих вчених.

Публікації. Результати дисертаційної роботи опубліковані в 28 наукових роботах, включаючи: 1 монографію; 14 статей у фахових науково-технічних виданнях України (з них 7 статей у науково-технічних виданнях України, що входять до наукометричних баз даних), 3 статті в інших виданнях, 10 тез доповідей в збірниках матеріалів науково-технічних конференцій.

Об'єм і структура дисертації. Дисертація складається з вступу, п'яти розділів, висновків, списку використаних джерел, що містить 121 найменування і 7 додатків. Робота включає 138 сторінок основного тексту, 14 рисунків в тексті, 4 таблиці, 14 сторінок літературних джерел та 53 сторінки додатків. Повний обсяг роботи 234 сторінки.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ ДИСЕРТАЦІЇ

У **вступі** обґрунтовано актуальність проблеми дослідження нових класів ГЧС та розробки методів і програмних засобів дослідження їх основних властивостей з орієнтацією на їх практичні застосування. Сформульовано мету та задачі дослідження, визначені наукова новизна і практичне значення отриманих результатів.

Перший розділ має оглядовий характер і присвячений аналізу форм представлення інформації. Показано, що найбільш перспективними в використанні являються гіперкомплексні числові системи.

Гіперкомплексна числова система вимірності n в загальному випадку має позначення

$$\Gamma(e,n), \tag{1}$$

де e - ім'я елементів базису ГЧС, який має вигляд:

$$\{e_1, e_2, ..., e_n\}, \tag{2}$$

Елементи гіперкомплексної системи (1) мають вигляд

$$A = a_1 e_1 + a_2 e_2 + .. + a_n e_n, \tag{3}$$

де $a_1, a_2, ..., a_n$ - коєфіцієнти, які можуть належати системам дійсних, комплексних або інших гіперкомплексних чисел.

Над елементами ГЧС у вигляді (3) задано наступні операції: додавання, віднімання, множення. Також розглянуто алгоритми знаходження нульового та одиничного елементів, норми та дільників нуля.

Особливу увагу приділено процедурам подвоєння ГЧС, які дозволяють будувати нові ГЧС більших вимірностей.

Процедура подвоєння Грасмана-Кліфорда (ГК–процедура), порівняно з іншими процедурами, дозволяє одержувати ГЧС з більш широкими можливостями як по вимірності, так і по властивостях.

Процес подвоєння системи $\Gamma_1(e,m)$ системою $\Gamma_2(f,\mathrm{n})$ за допомогою ГК–процедури позначатимемо так:

$$Д\left(\Gamma_1(e,m), \Gamma_2(f,\mathrm{n})\right) = \Gamma_3(g, mn), \tag{4}$$

де $Д$ – оператор подвоєння, а mn – вимірність одержаної в результаті подвоєння ГЧС Γ_3. mn елементами базису g будуть всілякі добутки елементів базисів e та f:

$$g = \{e_1 f_1, e_1 f_2, ..., e_1 f_n, ..., e_m f_{n-1}, e_m f_n\}. \tag{5}$$

Причому, $e_i f_j = \alpha f_j e_i$, $i = 1,...,m$, $j = 1,...,n$. Якщо $\alpha = 1$, то система Γ_3 буде комутативною, якщо $\alpha = -1$ – некомутативною та при $\alpha = 0$ – виродженою.

Таблиця Келі вихідної системи складатиметься з добутків елементів базису g, значення яких відображає властивості конкретної ГЧС.

Також в першому розділі проаналізовано метод побудови нелінійних функцій від гіперкомплексні змінної за допомогою асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь.

У **другому розділі** на основі аналізу побудови системи кватерніонів, побудовано за допомогою ГК-процедури нові класи ГЧС четвертої вимірності – некомутативний та комутативний.

Системою кватерніонів $\boldsymbol{H}$ називається гіперкомплексна чотиривимірна система чисел, яка є результатом некомутативного подвоєння системи комплексних чисел $\boldsymbol{C}$ тією ж системою чисел. Або, використовуючи систему позначень запишемо:

$$\boldsymbol{H} = Д(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}). \tag{6}$$

Якщо некомутативно подвоїти систему комплексних чисел $\boldsymbol{C}$ системою подвійних чисел $\boldsymbol{W}(e,2)$, то одержимо систему антикватерніонів $\boldsymbol{AH}$, або через оператор подвоєння:

$$\boldsymbol{AH} = Д(\boldsymbol{C}(e,2), \boldsymbol{W}(f,2)). \tag{7}$$

Якщо некомутативно подвоїти за допомогою процедури Грасмана–Кліфорда основні ГЧС другої вимірності: комплексну – $\boldsymbol{C}$, подвійну – $\boldsymbol{W}$ та дуальну – $\boldsymbol{D}$, то одержимо такі класи ГЧС: $Д_n(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{C}, 4) = \boldsymbol{H}$, $Д_n(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{W}, 4) = \boldsymbol{AH}$, $Д_n(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4) \simeq Д_n(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, 4)$, $Д_n(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{W}, 4)$; $Д_n(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{D}, 4)$; $Д_n(\boldsymbol{W}, \boldsymbol{D}, 4) \simeq Д_n(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{W}, 4)$.

В дисертаційній роботі встановлено зв’язок між цими класами ГЧС та узагальненими кватерніонами, таблиця Келі яких має вигляд:

$H_{\alpha\beta}$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	e_1	e_2	e_3	e_4
e_2	e_2	$-\alpha e_1$	e_4	$-\alpha e_3$
e_3	e_3	$-e_4$	$-\beta e_1$	βe_2
e_4	e_4	αe_3	$-\beta e_2$	$-\alpha\beta e_1$

, (8)

де α, β $\in$ R.

Аналогічно, комутативно подвоївши за допомогою процедури Грасмана–Кліфорда основні ГЧС другої вимірності одержали клас комутативних ГЧС з таблицею Келі:

	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	αg_1	g_4	αg_3
g_3	g_3	g_4	βg_1	βg_2
g_4	g_4	αg_3	βg_2	$\alpha\beta g_1$

(9)

Отже, комутативний клас ГЧС складається з таких представників класів ізоморфізмів: $Д_k(\boldsymbol{C},\boldsymbol{C},4)$, $Д_k(\boldsymbol{C},\boldsymbol{W},4) \simeq Д_k(\boldsymbol{W},\boldsymbol{C},4)$, $Д_k(\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},4) \simeq Д_k(\boldsymbol{D},\boldsymbol{C},4)$, $Д_k(\boldsymbol{W},\boldsymbol{W},4)$, $Д_k(\boldsymbol{W},\boldsymbol{D},4) \simeq Д_k(\boldsymbol{D},\boldsymbol{W},4)$, $Д_k(\boldsymbol{D},\boldsymbol{D},4)$, де $\simeq$ - оператор ізоморфізму.

Значна частина другого розділу присвячена дослідженню основних арифметичних та алгебраїчних властивостей систем цих класів. Проведено порівняльний аналіз ГЧС некомутативного класу з узагальненими кватерніонами, що дозволило узагальнити таблицю Келі та закони представлення норм, спряжених чисел, дільників нуля для цілого некомутативного класу ГЧС. Проведено аналогічні дослідження в комутативному класі ГЧС.

Метод побудови гіперкомплексних систем за допомогою ГК - процедури узагальнено для неканонічних автоподвоюваних ГЧС. Враховуючи, шо будь-яка неканонічна ГЧС другої вимірності ізоморфна ГЧС, яка має вигляд:

Q_2	e_1	e_2
e_1	e_1	e_2
e_2	e_2	pe_1+qe_2

, (10)

та застосувавши ГК-процедуру до (10), то у випадку комутативного подвоєння отримаємо систему:

$Q_4^k(E)$	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	E_2	E_3	E_4
E_2	E_2	pE_1+qE_2	E_4	pE_3+qE_4
E_3	E_3	E_4	pE_1+qE_3	pE_2+qE_4
E_4	E_4	pE_3+qE_4	pE_2+qE_4	$p^2E_1+pqE_2+pqE_3+q^2E_4$

, (11)

а у випадку некомутативного подвоєння - систему Q_4^n, таблиця Келі якої має наступний вигляд:

$Q_4^n(E)$	E_1	E_2	E_3	E_4
E_1	E_1	E_2	E_3	E_4
E_2	E_2	pE_1+qE_2	E_4	pE_3+qE_4
E_3	E_3	$-E_4$	pE_1+qE_3	$-pE_2-qE_4$
E_4	E_4	$-pE_3-qE_4$	pE_2+qE_4	$-p^2E_1-pqE_2-pqE_3-q^2E_4$

. (12)

При невеликих відмінностях таблиць множення (11) та (12) структура і властивості систем Q_4^k та Q_4^n значно відрізняються.

При побудові алгоритмів математичного моделювання різних процесів з використанням ГЧС розглядаються дві форми представлення інформації: натуральна та матрична.

При матричному представленні кожному базисному елементу e_i відповідає матриця $\mathbf{M}(e_i)$ розмірами $n\times n$. Таким чином, всі дії з гіперкомплексними числами зводяться до дій над матрицями, для яких розроблено різноманітне математичне забезпечення, шо значно зменшує об'єм обчислювальних операцій при математичному моделюванні та розширює можливості їх використання для опису поворотів у тривимірному просторі та інших прикладних задач.

Зокрема, матричне представлення класу некомутативних систем $Д_n$ побудовано трьома способами:

1) на основі встановлених зв'язків між класом систем $Д_n$ та узагальненими кватерніонами можливо використати матричне представлення узагальнених кватерніонів;

2) на основі мультиплікативності норми можна зробити висновок про те, що матриця норми може бути матричним представленням ГЧС досліджуваного класу;

3) оскільки ГЧС цього класу побудовано із систем другої вимірності внаслідок подвоєння, то можливо побудувати матричне представдення досліджуваних систем ще одним способом - використовуючи матричні представлення систем другої вимірності. При цьому отримаємо наступний результат:

$$\mathbf{M}_{Д_n(Г_1,Г_2,4)}=\begin{pmatrix} A & B \\ \lambda\overline{B} & \overline{A}\end{pmatrix}, A,B\in Г_1,\ \lambda\in Г_2.$$

Варто зазначити, що кінцеві результати досліджень по кожному з вищеописаних методів побудови матричного представлення дають однакові результати, що підтверджено в роботі численними перевірками.

Третій розділ містить виведення аналітичних представлень основних нелінійностей побудованих класів ГЧС. Зокрема, змодельовано представлення експоненти, логарифма, тригонометричних та гіперболічних функцій методом асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь. Показано, шо застосування цього методу зменшує обчислювальну складність побудови таких нелінійностей порівняно з прямими методами.

У випадку узагальнених кватерніонів система має наступні розв’язки:

$$\lambda_{1,2} = m_1 + \sqrt{\overline{m}}\ ,\ \lambda_{3,4} = -m_1 + \sqrt{\overline{m}}\ ,\ \overline{m} = -(\alpha m_2^2 + \beta m_3^2 + \alpha\beta m_4^2)\,. \qquad (13)$$

Таким чином, остаточний вираз для представлення експоненти для узагальнених кватерніонів матиме вигляд

$$Exp(M) = \frac{1}{2} e^{m_1} \begin{bmatrix} \left(e^{\sqrt{\overline{m}}} + e^{-\sqrt{\overline{m}}}\right) e_1 + \\ + \frac{1}{\sqrt{\overline{m}}}\left(e^{\sqrt{\overline{m}}} - e^{-\sqrt{\overline{m}}}\right)\left(m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4\right) \end{bmatrix}. \qquad (14)$$

Окремо розглядається випадок, коли $\overline{m} = 0$, тоді представлення експоненти матиме інший вигляд, а саме: $Exp(M) = e^{m_1}\left(e_1 + m_2 e_2 + m_3 e_3 + m_4 e_4\right)$.

Маючи представлення експоненціальної функції, можливо побудувати представлення логарифмічної функції, оскільки остання є оберненою до експоненціальної.

1) $\overline{m} = -(\alpha m_2^2 + \beta m_3^2 + \alpha\beta m_4^2) < 0$, $n_k \in Z$

$$Ln(\sum_{k=1}^{4} x_k e_k) = \ln\sqrt{\overline{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{\overline{x} - x_1^2}} arctg \frac{\sqrt{\overline{x} - x_1^2}}{x_1} (\sum_{k=2}^{4} x_k e_k + \pi \sum_{k=2}^{4} n_k e_k), \qquad (15)$$

.

2) $\overline{m} = -(\alpha m_2^2 + \beta m_3^2 + \alpha\beta m_4^2) > 0$.

$$Ln(\sum_{k=1}^{4} x_k e_k) = \ln\sqrt{\overline{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{x_1^2 - \overline{x}}} arth \frac{\sqrt{x_1^2 - \overline{x}}}{x_1} \sum_{k=2}^{4} x_k e_k\,. \qquad (16)$$

3) $\overline{m} = -(\alpha m_2^2 + \beta m_3^2 + \alpha\beta m_4^2) = 0$

$$Ln(\sum_{k=1}^{4} x_k e_k) = \ln\sqrt{\overline{x}} \cdot e_1 + \frac{1}{\sqrt{\overline{x} - x_1^2}} (\sum_{k=2}^{4} x_k e_k) . \qquad (17)$$

Побудовані представлення експоненціальної та логарифмічної функцій в класі некомутативних ГЧС (узагальнених кватерніонів) дають можливість отримати представлення для конкретної системи. Для цього потрібно підставити конкретні значення α і β в (14) – (17).

В таблиці 1 для порівняння наведено час обчислення експоненти за допомогою формул представлення t_ϕ та шляхом обчислення суми ряду t_p для різних ГЧС.

За таким же алгоритмом будується представлення експоненти і логарифма в комутативному класі ГЧС $Д_k$ та комутативній автоподвоюваній системі Q_4^k .

Таблиця 1

Порівняння часу обчислення експоненти для різних ГЧС

ГЧС			Час обчислення		$\frac{t_p}{t_\phi}$
№	Ім’я	Вимірність	За представленням, t_ϕ, c	За допомогою суми ряду, t_p, c	
1	C	2	$7{,}1 \cdot 10^{-5}$	$6{,}0 \cdot 10^{-3}$	84
2	D	2	$3{,}3 \cdot 10^{-5}$	$4{,}0 \cdot 10^{-3}$	121
3	W	2	$7{,}1 \cdot 10^{-5}$	$5{,}0 \cdot 10^{-3}$	70
4	$Г_{31}$	3	$3{,}8 \cdot 10^{-5}$	$8{,}0 \cdot 10^{-3}$	210
5	$Г_{32}$	3	$5{,}5 \cdot 10^{-5}$	$10{,}0 \cdot 10^{-3}$	181
6	$Г_{33}$	3	$21{,}5 \cdot 10^{-5}$	$14{,}0 \cdot 10^{-3}$	65
7	$Г_{41}$	4	$16{,}5 \cdot 10^{-5}$	$24{,}0 \cdot 10^{-3}$	84
8	$Г_{42}$	4	$4{,}0 \cdot 10^{-5}$	$15{,}0 \cdot 10^{-3}$	145
9	$Г_{43}$	4	$6{,}1 \cdot 10^{-5}$	$18{,}0 \cdot 10^{-3}$	300
10	$Г_{44}$	4	$7{,}0 \cdot 10^{-5}$	$16{,}0 \cdot 10^{-3}$	228
11	$Г_{45}$	4	$7{,}9 \cdot 10^{-5}$	$19{,}0 \cdot 10^{-3}$	240
12	K	4	$36{,}0 \cdot 10^{-5}$	$18{,}5 \cdot 10^{-3}$	51

Представлення експоненціальної функції в ГЧС Q_4^n за допомогою асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь має настільки громіздкий вигляд, що доцільно скористатися іншим методом, а саме шляхом розкладання в ряд. Таке представлення має обмежену точність, але дозволяє проводити обрахунки значно ефективніше.

Наприклад, для гіперкомплексного числа з Q_4^n класу, яке має вигляд $A = 0.1e_1 + 0.2e_2 + 0.3e_3 + 0.4e_4$, та при $p = 1$, $q = 1$, експонена матиме вигляд:

$$
\begin{aligned}
Exp(A) = {} & (1 + 0.1t - 0.0100000000t^2 + 0.0018333334t^3)e_1 + \\
& + (0.2t - 0.0400000000t^2 + 0.0040000000t^3)e_2 + \\
& + (0.3t - 0.0050000000t^2 + 0.0063333334t^3)e_3 + \\
& + (0.4t - 0.0400000000t^2 + 0.0123333334t^3)e_4
\end{aligned}
\qquad (18)
$$

На рис. 1 представлено графіки амплітуд компонент експоненціальної функції, яка має представлення (18).

Для обчислення похибки такого представлення побудуємо представлення компонент експоненти шляхом рекурентного множенння гіперкомплексних чисел. Обмежимось чотирма членами степеневого ряду.

Графічно похибки обчислень по кожній компоненті зображено на рис. 2.

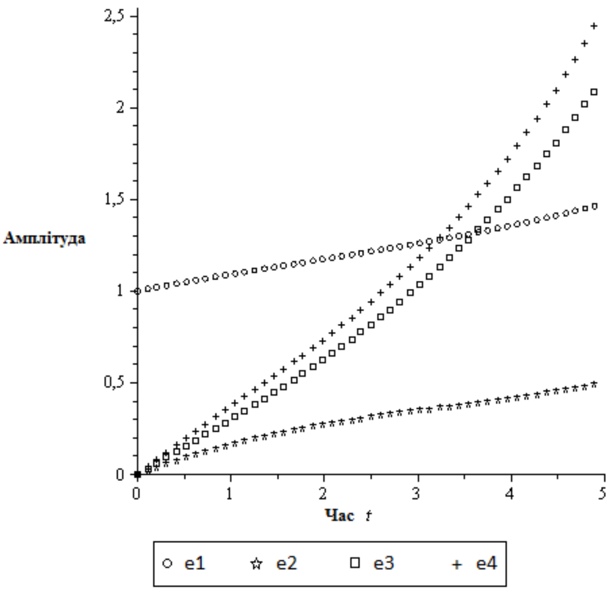

Рис. 1. – Графіки амплітуд компонент експоненти

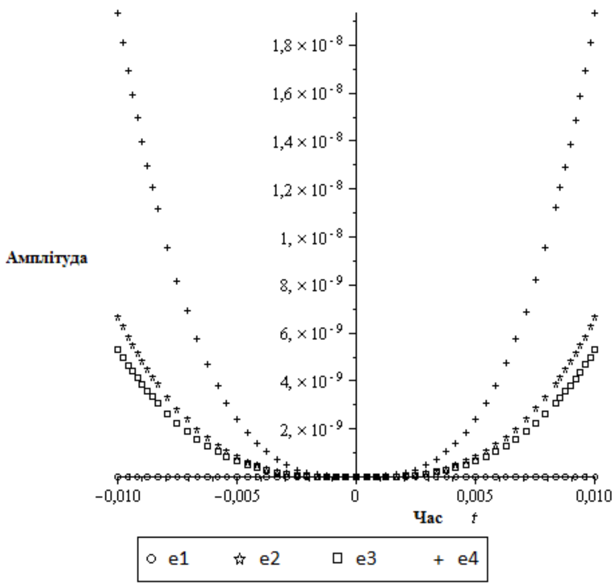

Рис. 2. – Графіки похибки обчислення компонент експоненти

З рис. 2 можна побачити, що з усіх компонент експоненти найбільш вразливою до зміни параметрів є четверта. Цей факт потрібно враховувати при плануванні та проведенні експериментів з моделями різних явищ та, безпосередньо, під час самого процесу моделювання.

У **четвертому розділі** розроблено програмні засоби для побудови та дослідження основних властивостей ГЧС різних вимірностей. Наведено лістинги процедур програмного комплексу та приклади їх виконання. Застосовано процедури комплексу для вирішення наступних задач: виконання алгоритму ділення двох гіперкомплексних чисел; поворот вектора в тривимірному просторі. Зроблено порівняльний аналіз алгоритмів розв’язування вищенаведених задач без застосування процедур програмного комплексу та з безпосереднім їх використанням, що явно показує ефективність розроблених методів та засобів математичного моделювання.

Такий пакет містить наступні взаємопов’язані між собою процедури, що наведено (таблиця 2).

Таблиця 2

Список процедур комплексу та їх взаємозв’язки

№	**Процедура**	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	VizInA																																
2	ConvertA																																
3	Refill																																
4	ListHNS																																
5	inConvertHNS		x		x																												
6	nameBas																																
7	renamA	x	x																														
8	VizHNS	x																															
9	LibHNS()																																
10	SearchHNS																																
11	RefillHNS																																
12	VizLibHS	x							x																								
13	inAdd																																
14	Add(A,B,dimHNS)	x	x																														
15	Subtr(A,B,dimHNS)	x	x																														
16	inMulti(A,B,HNS)									x	x																						
17	natMulti(A,B,HNS,nBas)	x	x							x	x																						
18	Norma(A,nameHNS)									x	x																						
19	Unit	x								x	x						x																
20	Conjug	x								x	x						x																
21	Divis		x							x	x						x		x		x												
22	Trans(M,t)																																
23	AddHNS		x	x	x	x				x																							
24	GenIzo	x								x	x						x																
25	DirSum2				x					x	x																						
26	DirSumN	x			x				x	x	x																						
27	HNSnumber	x																															
28	Rad2		x	x						x	x						x											x					
29	SqrtEq		x	x						x	x			x			x											x					
30	MultiDim							x	x	x	x																						
31	SysIzo									x	x																						
32	inDet									x	x						x																

Нижче наведено приклад виконання вищеописаної процедури ***HyperLib*[*Divis*]** в системі комплексних чисел:

> $A := [a_1, a_2]$; $B := [b_1, b_2]$

> *Div*:=***HyperLib*[*Divis*]**(*A,B,C*)

$$Div := \left[\left[\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2}, \frac{-a_1 b_2 + a_2 b_1}{b_1^2 + b_2^2} \right], \frac{(a_1 b_1 + a_2 b_2)\, e_1}{b_1^2 + b_2^2} + \frac{(-a_1 b_2 + a_2 b_1)\, e_2}{b_1^2 + b_2^2} \right]$$

Розглянемо задачу визначення координат точки, отриманої внаслідок послідовного виконання поворотів вектора навколо двох осей: спочатку навколо осі, яка визначається кватерніоном q, а потім – навколо осі, яка визначається кватерніоном p.

Такий складний поворот визначається формулою $r' = pqrq^{-1}p^{-1}$, де всі множення кватерніонні. Отже, програма виконання повороту з допомогою засобів гіперкомплексних обчислень має вигляд:

```
Pov:=proc(r, q, p, Cq, Cp )
        for i from 1 to 4 do
        r1[i]:=factor(inMulti(inMulti(inMulti(inMulti(p, q, H), r, H),
        Cq[1], H), Cp[1], H)[i]): end do:
        RETURN(r1)
end proc
```

Таким чином, засобами гіперкомплексних обчислень можна зменшити об'єм програмної реалізації конкретної задачі. Наприклад, при виконанні алгоритму ділення двох гіперкомплексних чисел із застосуванням процедур комплексу об'єм програми зменшується в 2 рази, при математичному моделюванні повороту в тривимірному просторі засобами гіперкомплексних обчислень – в 3 рази.

У **п'ятому розділі** застосовано метод ізоморфного переходу між ГЧС для побудови алгоритмів швидкої двомірної згортки масивів різної вимірності.

При синтезі структур реверсивних цифрових фільтрів з використанням ГЧС необхідно застосовувати такі ГЧС, які побудовані на основі системи комплексних чисел $\boldsymbol{C}$. Однією з таких систем є система квадриплексних чисел $\boldsymbol{K}$. Ця система отримується комутативним автоподвоєнням системи комплексних чисел. ГЧС $\boldsymbol{K}$ ізоморфна системі бікомплексних чисел $\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}$, що є прямою сумою двох систем комплексних чисел $\boldsymbol{C}$.

Прямий L і зворотний L^{-1} оператори ізоморфізму між цими ГЧС мають вигляд:

$$L:\begin{cases} e_1 = f_1 + f_3 \\ e_2 = -f_2 + f_4 \\ e_3 = -f_2 - f_4 \\ e_4 = -f_1 + f_3 \end{cases}, \quad L^{-1}:\begin{cases} f_1 = (e_1 - e_4)/2 \\ f_2 = (-e_2 - e_3)/2 \\ f_3 = (e_1 + e_4)/2 \\ f_4 = (e_2 - e_3)/2 \end{cases} \qquad (19)$$

Таким чином, якщо при множенні гіперкомплексних чисел в системі $\boldsymbol{K}$ необхідно виконати 16 дійсних множень і 12 додавань, то при переході в ГЧС $\boldsymbol{C} \oplus \boldsymbol{C}$ і використанні алгоритму множення комплексних чисел необхідно виконати 6 дійсних множень, 18 додавань і 4 коротких операцій ділення на 2.

Проведені дослідження показали, що виконання нелінійних операцій над гіперкомплексними числами за допомогою переходу від сильнозаповненої ГЧС до ізоморфної слабозаповненої ГЧС, виконання операцій в ній і зворотного переходу значно знижує кількість необхідних дійсних операцій і, особливо, множення. Так при використанні гіперкомплексних чисел вимірності 2^n кількість множень знижується в n разів, а в інших випадках більш, ніж в $n/2$ разів. Це говорить про доцільність застосування даних алгоритмів при вирішенні задач обробки цифрових сигналів.

Лінійна згортка виконується за формулою

$$Z_k = \sum_{m=-\infty}^{k} x_m y_{k-m}, \qquad (20)$$

І показує, що якщо розглядається лінійна згортка двох послідовностей довжиною по 2^n елементів, то при прямому обчисленні її $2^{n+1}-1$ відліків необхідно виконати 2^{2n} дійсних множення. За допомогою гіперкомплексних числових систем можна зменшити кількість обчислень.

Компоненти двомірної лінійної згортки розраховуються за формулою:

$$Z(n_1,n_2) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} x(k_1,k_2) h(n_1-k_1, n_2-k_2). \qquad (21)$$

Тут і сигнал $x(k_1,k_2)$, і ядро $h(n_1,n_2)$ є двомірними масивами. Реальні дискретні сигнали мають скінченні розміри.

Сигнал і ядро двомірної згортки представляються 2-вимірними матрицями 2x2. Двомірна згортка масивів 2x2 обчислюється за формулою:

$$con_{kl} = \sum_{n=1}^{2} \sum_{m=1}^{2} x_{nm} y_{n-k,m-l} \quad . \qquad (22)$$

Тоді для коректного обчислення за формулою (21) матрицю сигналу потрібно окаймити з усіх боків рядками і стовпцями, заповненими нулями.

Нижче представлений алгоритм швидкої лінійної двомірної згортки масивів 2x2, оформлений у вигляді процедури *Conv22*, написаної в системі символьних обчислень Maple.

```
Conv22 := proc(Aj, Ajm, B, W4, W41)
    local Y1, i, j, Ys, C1, con, C2, B1, Bs;
    B1 := MatrList(B);
    Bs := W4W41(B1);
    C1 := inMulti(Bs[1], Ajm, W41);
    con := array( − 1 ..1, − 1 ..1);
    C2 := W4W41(C1)[1];
    for i to 4 do C2[i] := simplify(C2[i]) end do;
    con[ − 1, − 1] := Aj[3]*B[1, 2];
    con[ − 1, 0] := Aj[1]*Y[1, 2] + Aj[3]*Y[2, 2];
    con[ − 1, 1] := Aj[1]*Y[2, 2];
    con[0, − 1] := Aj[3]*Y[1, 1] + Aj[4]*Y[1, 2];
    con[0, 0] := C2[1];
    con[0, 1] := C2[3] − con[0, − 1];
    con[1, − 1] := Aj[4]*Y[1, 1];
    con[1, 0] := C2[2] − con[ − 1, 0];
    con[1, 1] := C2[4] − con[ − 1, − 1] − con[1, − 1] − con[
     − 1, 1];
    RETURN(con)
end proc
```

Критерієм α ефективності алгоритму згортки є відношення числа множень M_N, необхідних при виконанні згортки $N \times N$, до всієї кількості парних добутків: $\alpha = \frac{M_N}{N^2}$. Розглянемо компоненти лінійної згортки $N \times N$ в загальному вигляді (рис. 3).

Як видно з рис. 3, для переходу від згортки $(N-1)\times(N-1)$ до згортки $N \times N$ потрібно виконати $2(N-1)$ множень.

Таким чином, існує рекурентна залежність $M_N = M_{N-1} + 2(N-1)$.

x_1y_1			…			
$x_1y_2 +$	x_2y_1		…			
…	…	…	…	…	…	…
$x_1y_N +$	$x_2y_{N-1} +$	$x_3y_{N-2} +$	…	$x_{N-2}y_3 +$	$x_{N-1}y_2 +$	x_Ny_1
	$x_2y_N +$	$x_3y_{N-1} +$	…	$x_{N-2}y_4 +$	$x_{N-1}y_3 +$	x_Ny_2
…	…	…	…	…	…	…
				$x_{N-2}y_N +$	$x_{N-1}y_{N-1} +$	x_Ny_{N-2}
			…		$x_{N-1}y_N +$	x_Ny_{N-1}
			…			x_Ny_N

Рис.3. – Загальний вигляд компонент лінійної згортки $N \times N$

При використанні такого методу побудови алгоритму обчислення згортки значення критерію α зростає при збільшенні довжини послідовності, яка згортається. Наприклад, при збільшенні довжини послідовності від $N=4$ значення α буде зростати так:

N 4	5	6	7	8	9	10
α 0, 5625	0,68	0,75	0,79592	0, 82812	0,85185	0,87

Як бачимо (рис. 4), при $N=8$ індекс дорівнює $\alpha = 0.82812$. Однак, для цілих степенів двійки є алгоритми декомпозиції, для яких цей індекс набагато менший: $\alpha = 0.5625$. Тому при $N=8$ недоцільно продовжувати процес рекурсії від $N=7$, а слід використовувати алгоритм декомпозиції для степеня два.

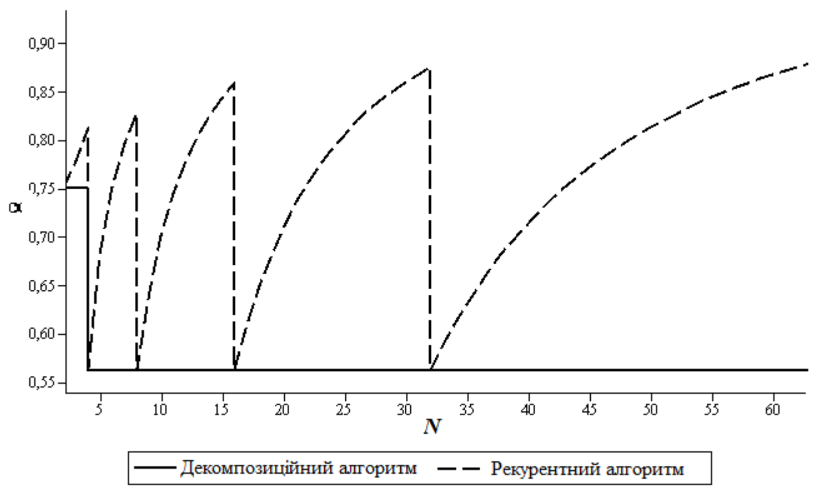

Рис.4. – Залежність індексу α від довжини N масиву, який згортається

Передавальна функція з гіперкомплексними коефіцієнтами вимірності 4, що описує цифровий фільтр першого порядку, може реалізовувати передавальну функцію з дійсними коефіцієнтами, що описує фільтр, порядок якого може бути до 4-го включно.

Розглянемо передавальну функцію фільтра четвертого порядку з дійсними коефіцієнтами:

$$H_R = \frac{\varphi_0 + \varphi_1 \cdot z^{-1} + \varphi_2 \cdot z^{-2} + \varphi_3 \cdot z^{-3} + \varphi_4 \cdot z^{-4}}{1 + \phi_1 \cdot z^{-1} + \phi_2 \cdot z^{-2} + \phi_3 \cdot z^{-3} + \phi_4 \cdot z^{-4}}. \tag{23}$$

Відповідна передавальна функція фільтра першого порядку з гіперкомплексними коефіцієнтами вимірності 4 буде мати вигляд

$$H_Г = \frac{A + B \cdot z^{-1}}{\varepsilon + C \cdot z^{-1}}, \tag{24}$$

де $A = a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 + a_4 \cdot e_4$, $B = b_1 \cdot e_1 + b_2 \cdot e_2 + b_3 \cdot e_3 + b_4 \cdot e_4$ та $C = c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2 + c_3 \cdot e_3 + c_4 \cdot e_4$ - квадриплексні числа.

Цю задачу можна розв’язати з використанням програмного комплексу гіперкомплексних обчислень, оскільки останній містить всі необхідні процедури. Покажемо, який вигляд матиме розв’язок цієї задачі з використанням програмного комплексу гіперкомплексних обчислень. Оскільки, як показано вище, для знаходження коефіцієнтів квадриплексного фільтра потрібно знаходити норму гіперкомплексного числа, спряжений елемент та виконувати дію множення, а програмно-алгоритмічний засіб містить процедури для безпосереднього виконання таких операцій, то доцільно ними скористатися.

Filtr1:=**proc**($\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$)

local *C, Q, NQ, sys1, CoeffC, A, B, P, ConQ, Chis, Chis1, Chisel, Chisel1, sys2, sys, CoeffAB, A, B,* H_K;

$C := c_1 e_1 + c_2 e_2 + c_3 e_3 + c_4 e_4$;

Q:=*ConvertA*($e_1 + C \cdot z^{-1}$, 4);

NQ:=*collect*(*expand*(***Norma****(Q1, K)*), z^{-1});

sys1:={ *coeff(NQ,* $z^{-1}) = \phi_1$, *coeff(NQ,* $z^{-2}) = \phi_2$, *coeff(NQ,* $z^{-3}) = \phi_3$,

coeff(NQ, $z^{-4}) = \phi_4$, };

CoeffC:=*solve*(*sys1*, [c_1, c_2, c_3, c_4]);

for *i* **from** 1 **to** 4 **do** *c*[*i*]:=*rhs*(*CoeffC*[*i*]) **end do**;

$A := a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$; $B := b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4$; $P := A + B \cdot z^{-1}$;

ConQ:=***Conjug***(*Q1, K, e*);

Chis:=***ConvertA(natMulti***(*P,ConQ*[*2*], *K, e*),*4*);

for *i* **from** 1 **to** 4 **do** *Chis1*[*i*]:=*factor*(*Chis*[*i*]) **end do**;

Chisel:= ***VizInA***([*Chis1*[*1*],*Chis1*[*2*],*Chis1*[*3*], *Chis1*[*4*]],*e*);

Chisel1:=*collect*(*expand*(*coeff*(*Chisel,e*[1])), *z*);

sys2:={ *coeff(Chisel1,* $z^0) = \varphi_0$, *coeff(Chisel1,* $z^{-1}) = \varphi_1$, *coeff(Chisel1,* $z^{-2}) = \varphi_2$, *coeff(Chisel1,* $z^{-3}) = \varphi_3$, *coeff(Chisel1,* $z^{-4}) = \varphi_4$ };

sys:=subs($b_3 = 0$, $b_2 = 0$, $b_1 = 0$, *sys2);*

CoeffAB:=*solve*(*sys*, [a_1, a_2, a_3, a_4, b_4]);

for *i* **from** 1 **to** 4 **do** *a*[*i*]:=*rhs* (*CoeffAB*[*i*]) **end do;**

$b_1 := 0$, $b_2 = 0$, $b_3 := 0$, b_4:=*rhs*(*CoeffAB*[5]);

A:= *a*[1]*e*[1] + *a*[2]*e*[2] + *a*[3]*e*[3] + *a*[4]*e*[4]; *B*:=*b*[1]*e*[1] + *b*[2]*e*[2] + *b*[3]*e*[3] + *b*[4]*e*[4]; *C*:=*c*[1]*e*[1] + *c*[2]*e*[2] + *c*[3]*e*[3] + *c*[4]*e*[4];

$$H_K = \frac{A + Bz^{-1}}{e_1 + Cz^{-1}}$$

RETURN(H_K) **end proc**

Визначимо кількість операцій, необхідних для реалізації фільтрів з гіперкомплексними коефіцієнтами, та фільтрів, отриманих в результаті ізоморфного переходу до системи з простішою таблицею множення базисних елементів. Таким чином можемо оцінити ефективність використання ізоморфних переходів для зменшення складності цифрових фільтрів з гіперкомплексними коефіцієнтами. Результати підрахунку кількості дійсних операцій (множення, додавання, віднімання та елементи затримки) наведені в таблиці 3.

Таблиця 3

Результати застосування ізоморфізму ГЧС для зменшення кількості операцій

Система чисел	Порядок фільтра	Кількість множень дійсних чисел	Кількість додавань та віднімань дійсних чисел	Кількість елементів затримки дійсних чисел
Дійсні числа	4	9	8	8
Квадриплексні числа	1	48	44	5
Бікомплексні числа	1	25	21	5

ВИСНОВКИ

В результаті досліджень, виконаних в рамках дисертаційної роботи, направлених на підвищення ефективності математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів методами і засобами подання та обробки даних у гіперкомплексних числових системах, отримані наступні наукові та практичні результати.

1. Проаналізовано сучасний стан форм представлення даних при математичному моделюванні задач цифрової обробки сигналів, область застосувань яких розширюється з розвитком інформаційних технологій. Показано, що практична доцільність використання гіперкомплексних числових систем для математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів зростає з огляду на те, що наявність широкого спектру ГЧС дозволяє досягти високого рівня адекватності моделей таких задач.
2. Проведений аналіз показав, що сучасні вимоги до точності та швидкості моделювання задач цифрової обробки сигналів можуть бути досягнуті при використанні гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності, для побудови яких можна використати принцип подвоєння.
3. Вперше шляхом застосування процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда побудовано класи некомутативних та комутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності, які відрізняються від інших тим, що на структурному рівні враховують задані обмеження області представлення даних моделей, що при математичному моделюванні задач цифрової обробки сигналів дозволяє зменшити об’єми обчислень.
4. Вперше побудовано таблиці множення базисних елементів синтезованих класів ГЧС четвертої вимірності у загальному вигляді і досліджено узагальнені алгебраїчні властивості зазначених класів ГЧС, що дозволило отримати частинні вирази для основних характеристик цих ГЧС шляхом підстановки конкретних значень параметрів математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів.
5. Розвинено метод асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь для побудови представлень експоненціальної, тригонометричних та гіперболічних функцій в синтезованих класах ГЧС, що дозволяє зменшити час обчислення експоненти в порівнянні з прямими методами до 300 разів, а тригонометричних та гіперболічних функцій – до 100 разів, в залежності від вимірності та властивостей ГЧС.
6. Вперше запропоновано метод ізоморфного переходу від ГЧС із сильнозаповненою таблицею множення до ізоморфної їй ГЧС, таблиця множення базисних елементів якої є слабозаповненою, що дає можливість зменшити кількість дійсних операцій при виконанні гіперкомплексних нелінійних операцій від $n/2$ до n разів (n - вимірність ГЧС) за рахунок збільшення кількості нульових множників.

7. Вперше запропоновано принципи використання ГЧС для синтезу схем обчислень компонентів лінійної згортки масивів різних вимірностей. Використання гіперкомплексного представлення даних в таких схемах дозволяє зменшити кількість операцій порівняно з існуючими моделями за рахунок представлення масивів даних в ізоморфних гіперкомплексних числових системах, отриманих множенням вимірності системи подвійних чисел і ортогональних подвійних чисел, що спрощує перехід від однієї системи до іншої.
8. Розроблено комплекс алгоритмічних і програмних засобів для числових та аналітичних обчислень в різних ГЧС, в тому числі і в побудованих класах ГЧС, використання якого значно спрощує процес розробки математичних моделей з використанням ГЧС.
9. Розроблено за допомогою комплексу числових та аналітичних обчислень в різних ГЧС математичні моделі обчислення компонент лінійної згортки масивів різних вимірностей, використання в яких гіперкомплексного представлення даних дозволяє зменшити кількість операцій порівняно з існуючими моделями приблизно на 30%.
10. Показано, що представлення квадриплексних коефіцієнтів при математичному моделюванні рекурсивного цифрового фільтра за допомогою розробленого програмного комплексу гіперкомплексних обчислень дозволяє зменшити об'єм програми на 21%, в порівнянні з програмним кодом, у якому відсутні підключення процедур комплексу.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Калиновский Я. А. Гиперкомплексные числовые системы четвертой размерности / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало. – Київ: ІПРІ НАН України. – 2017. – 126 с. – монографія – *Автором дисертації застосовано процедуру подвоєння Грасмана-Кліфорда для побудови нових класів ГЧС четвертої вимірності.*
2. Калиновский Я. А. Система гиперкомплексных операций в Maple / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Я. В. Хицко, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2017. – Т. 19, № 2. – С. 11 – 23. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List).– *Автором дисертації проаналізовано структуру алгоритмічно-програмного комплексу гіперкомплексних обчислень.*
3. Калиновский Я. А. Исследование алгебраических и функциональных свойств обобщенных гиперкомплексных систем четвертой размерности / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2017. – Т. 19, № 1. – С. 22 – 33. (Індексується та реферується в ICI Journals

Master List). – *Здобувачем виконано обчислення по дослідженню властивостей узагальнених гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності.*

4. Каліновський Я. О. Побудова представлень логарифмічної функції в одному класі комутативних ГЧС четвертої вимірності / Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2016. – Т. 18, № 4. – С. 12 – 23. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List). – *Здобувачем виконано деякі обчислення, необхідні для представлення логарифмічної функції.*
5. Калиновский Я. А. Исследование свойств обобщенных гиперкомплексных числовых систем четвертой размерности, полученых процедурой удвоения Грасмана-Клиффорда / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2016. – Т. 18, № 3. – С. 3 – 11. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List). – *Здобувачем застосовано ГК-процедуру подвоєння для побудови нових класів ГЧС.*
6. Калиновский Я. А. Разработка представлений гиперболических и тригонометрических нелинейностей в системе обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2016. – Т. 18, № 1. – С. 14 – 22. (Індексується та реферується в ICI Journals Master List). – *Автором дисертації побудовано графіки амплітуд компонент тригонометричних та гіперболічних нелінійностей.*
7. Калиновский Я. А. Свойства обобщенных кватернионов и их связь с процедурой удвоения Грассмана-Клифорда / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Туренко (А. С. Сукало), Я. В. Хицко // Электронное моделирование. – 2015. – Т. 37, № 2. – С. 17 – 26. (Індексується та реферується в Cambridge Scientific Abstracts, Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec, BINITI РАН). – *Дисертантом досліджено властивості узагальнених кватерніонів.*
8. Калиновский Я. А. Исследование вычислительных операций в гиперкомплексной числовой системе антикватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Я. В. Хицко, А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Электронное моделирование. – 2014. – Т. 36, № 5. – С. 49 – 65. (Індексується та реферується в Cambridge Scientific Abstracts, Computer and Information Systems Abstracts, INIS Collection, Inspec, BINITI РАН). – *Автором дисертації проаналізовано основні алгебраїчні властивості системи антикватерніонів.*
9. Калиновский Я. А. Математическое моделирование представлений экспоненциальной и логарифмической функций в гиперкомплексной числовой системе обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 4. – С. 11 – 20. –

Здобувачем застосовано метод асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь для моделювання експоненти та логарифма від узагальнених кватерніонів.

10. Калиновский Я. А. Построение алгоритма цифровой подписи с использованием функций от обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 3. – С. 48 – 55. – *Дисертантом запропоновано застосувати функціональні властивості узагальнених кватерніонів у цифровому підписі.*
11. Каліновський Я. О. Синтез матричних представлень узагальнених кватерніонів / Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 2. – С. 14 – 29. – *Автором дисертації синтезовано матричні представлення узагальнених кватерніонів шляхом використання матриць другого порядку.*
12. Каліновський Я. О. Дослідження зв’язків між узагальненими кватерніонами та процедурою подвоєння ГЧС / Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Сукало // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2015. – Т. 17, № 1. – С. 36 – 45. – *Здобувачем встановлено відповідність систем некомутативного класу узагальненим кватерніонам відповідно до різних значень параметрів.*
13. Каліновський Я. О. Обчислювальні властивості одного класу некомутативних гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності / Я. О. Каліновський, Ю. Є. Боярінова, А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2014. – Т. 16, № 3. – С. 12 – 24. – *Здобувачем виконано обчислення по дослідженню представлення норми, спряжених чисел та дільників нуля в узагальнених ГЧС четвертої вимірності.*
14. Калиновский Я. А. Программный комплекс для гиперкомплексных вычислений / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Электронное моделирование. – 2017. – Т. 39, № 5. – С. 81 – 96. – *Здобувачем виконано програмне наповнення підсистеми визначення алгебраїчних характеристик пакету гіперкомплексних обчислень.*
15. Калиновский Я. А. Построение высокоразмерных изоморфных гиперкомплексных числовых систем для повышения эффективности вычислительных процессов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Электронное моделирование. – 2016. – Т. 38, № 6. – С. 67 – 84. – *Дисертантом проаналізовано алгоритм виконання процедури подвоєння ГЧС.*
16. Калиновский Я. А. Разработка представлений тригонометрических функций в числовой системе обобщенных кватернионов / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, Т. В. Синькова, А. С. Сукало // Электронное моделирование. – 2016. – Т. 38, № 3. – С. 23 – 32. – *Дисертантом застосовано метод побудови тригонометричних*

функцій від гіперкомплексної змінної для моделювання тригонометричного синуса та косинуса в системі узагальнених кватерніонів.

17. Туренко А. С. Дослідження обчислювальних властивостей системи антикватерніонів / А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2014. – Т. 16, № 2. – С. 62 – 73.
18. Туренко А. С. (Сукало А. С.) Дослідження властивостей одного узагальнення гіперкомплексної системи кватерніонів / А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Реєстрація, зберігання і обробка даних. – 2014. – Т. 16, № 1. – С. 19 – 27.
19. Kalinovsky Ya.A. Principles of constructing algorithms for processing digital signals using hypercomplex number systems / Ya.A. Kalinovsky, Yu.E. Boyarinova, Ya.V. Khitsko, A.S. Sukalo // 20th International Conference on System Analysis and Information Technology(SAIT 2018). – К.: Institute for Applied System Analysis of National Technical University of Ukraine “Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute”, 2018. – P. 194–195. – *Дисертантом показано практичне застосування процедур програмного комплексу гіперкомплексних обчислень*
20. Каліновський Я. О. Моделювання практичних задач за допомогою програмного комплексу гіперкомплексних обчислень / Я.О. Каліновський, А. С. Сукало // Сучасні проблеми математичного моделювання, обчислювальних методів та інформаційних технологій*:* матеріали Міжнародної наукової конференції (2 – 4 березня 2018 р.). – Рівне, 2018. – С. 49 – 51. – *Автором дисертації застосовано АПК для моделювання практичної задачі.*
21. Калиновский Я. А. Обработка гиперкомплексных данных с использованием пакета символьных вичислений в среде Maple / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Глобальні та регіональні проблеми інформатизації в суспільстві і природокористуванні ‘2017: матеріали 5-ї Міжнародної науково-технічної конференції НУБіП України (22 – 23 червня 2017 р.). – К.: Компринт. – 2017. – С. 63 – 65. – *Дисертантом проаналізовано структуру алгоритмічно-програмного комплексу гіперкомплексних обчислень.*
22. Калиновский Я. А. Пакет гиперкомплексных символьных вичислений в среде Maple / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало, Я. В. Хицко // Системный анализ и информационные технологии: материалы 19-й Международной научно-практической конференции SAIT 2017. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2017. – С. 232. – *Автором дисертації виконано програмне наповнення підсистеми визначення алгебраїчних характеристик пакету гіперкомплексних обчислень.*
23. Сукало А. С. Підсистема визначення алгебраїчних характеристик гіперкомплексних даних спеціалізованої бібліотеки процедур в середовищі

символьних обчислень Maple / А. С. Сукало // Матеріали щорічної підсумкової конференції ІПРІ НАН України. – Київ, ІПРІ НАНУ. – 2017. – С. 51 – 52.

24. Калиновский Я. А. Применение обобщенных кватернионов в цифровой подписи / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Сукало // Системный анализ и информационные технологии: материалы 18-й Международной научно-практической конференции SAIT 2016. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2016. – С. 327. – *Дисертантом виділено властивості узагальнених кватерніонів, корисних для застосувань в цифрових підписах*.

25. Калиновский Я. А. Обобщение кватернионов вращения и связь с процедурой удвоения Грассмана-Клиффорда / Я. А. Калиновский, Ю. Е. Бояринова, А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Системный анализ и информационные технологии: материалы 17-й Международной научно-практической конференции SAIT 2015. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2015. – С. 50. – *Автором дисертації досліджено обчислювальні властивості некомутативного класу ГЧС четвертої вимірності.*

26. Туренко А. С. (Сукало А. С.) Програмно-алгоритмічні засоби дослідження обчислювальних властивостей гіперкомплексних чисел в середовищі символьних обчислень Maple / А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Матеріали щорічної підсумкової конференції ІПРІ НАН України (26 – 27 травня 2015 р.). – Київ, ІПРІ НАНУ. – 2015. – С. 110 – 112.

27. Калиновский Я. А. Исследование классов изоморфизма неканонических гиперкомплексных числовых систем размерности 2 / Я. А. Калиновский, Я. В. Хицко, А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Системный анализ и информационные технологии: материалы 16-й Международной научно-практической конференции SAIT 2014. – К.: УНК «ИПСА» КПИ им. Игоря Сикорского, 2014. – С. 93. – *Здобувачем зроблено аналіз деяких класів ізоморфізмів неканонічних ГЧС другої вимірності.*

28. Туренко А. С. (Сукало А. С.) Дослідження властивостей антикватерніонної гіперкомплексної числової системи / А. С. Туренко (А. С. Сукало) // Матеріали щорічної підсумкової конференції ІПРІ НАН України. – Київ, ІПРІ НАНУ. – 2014. – С. 102 – 103.

АНОТАЦІЯ

Сукало А.С. Методи моделювання задач цифрової обробки сигналів засобами гіперкомплексних обчислень. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук за спеціальністю 01.05.02 – Математичне моделювання та обчислювальні методи. –

Інститут проблем реєстрації інформації НАН України, Національний технічний університет Ураїни «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», Київ, 2019.

Дисертація присвячена підвищенню ефективності математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів методами і засобами гіперкомплексних обчислень.

Проаналізовано сучасний стан математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів. В результаті аналізу методів побудови ГЧС виділено принцип подвоєння для генерації систем четвертої вимірності, які являються найбільш прийнятними при математичному моделюванні задач цифрової обробки сигналів.

Побудовано класи гіперкомплексних числових систем четвертої вимірності шляхом застосування процедури подвоєння Грасмана-Кліфорда. Запропоновано застосувати метод асоційованої системи лінійних диференціальних рівнянь для побудови представлень експоненціальної, тригонометричних та гіперболічних функцій в нових класах ГЧС.

Розроблено програмний комплекс гіперкомплексних обчислень, за допомогою якого досліджено основні алгебраїчні та функціональні властивості побудованих ГЧС.

Запропоновано зменшити обчислювальну складність математичного моделювання задач цифрової обробки сигналів за допомогою підходу, що ґрунтується на властивостях ізоморфного переходу між різними ГЧС.

Розроблено програмні модулі для синтезу задач цифрової обробки сигналів за допомогою процедур програмного комплексу гіперкомплексних обчислень.

Ключові слова: гіперкомплексна числова система, кватерніон, антикватерніон, узагальнений кватерніон, норма, спряження, дільники нуля, процедура подвоєння ГЧС, ізоморфізм, поворот вектора, передавальна функція цифрового фільра, амплітудно-частотна характеристика фільтра, згортка.

ABSTRACT

Sukalo A.S. Methods of modeling of digital signals processing by means of hypercomplex calculations. - Manuscript.

The thesis for the degree of a candidate of technical sciences on the specialty 01.05.02 - Mathematical modeling and computational methods. - Institute for Information Recording Problems of the National Academy of Sciences of Ukraine, National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute», Kyiv, 2019.

The thesis is devoted to increase of efficiency of mathematical modeling the problems of digital signals processing by methods and means of hypercomplex calculations.

The present state of mathematical modeling of digital signal processing tasks is analyzed. As a result of the analysis of the methods of constructing the HNS, the principle of

doubling for the generation of fourth-dimensional systems, which are most suitable in the mathematical modeling of the digital signal processing tasks, is singled out.

The classes of hypercomplex number systems of the fourth dimensionality have been constructed using the Grassmann-Clifford doubling procedure. It is proposed to use the method of an associated system of linear differential equations for constructing representations of exponential, trigonometric and hyperbolic functions in new classes of the HNS.

A software complex of hypercomplex computations was developed, this package of procedures allows you to effectively build mathematical models of different levels of complexity using hypercomplex data representation.

It is proposed to reduce the computational complexity of the mathematical modeling of the digital signal processing tasks using an approach based on the properties of the isomorphic transition between different HNS.

Software modules for the synthesis of digital signal processing tasks are developed with the help of procedures of the software complex of hypercomplex computations.

Key words: hypercomplex number system, quaternion, antiquaternion, generalized quaternion, norm, conjugation, zero dividers, the procedure of the HNS doubling, software complex, isomorphism, vector rotation, transfer function of the digital filter, amplitude-frequency characteristic of the filter, convolution.

АННОТАЦИЯ

Сукало А.С. Методы моделирования задач цифровой обработки сигналов средствами гиперкомплексных вычислений. – Рукопись.

Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук по специальности 01.05.02 - Математическое моделирование и вычислительные методы. - Институт проблем регистрации информации НАН Украины, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского», Киев, 2019.

Диссертация посвящена повышению эффективности математического моделирования задач цифровой обработки сигналов методами и средствами гиперкомплексных вычислений.

Проанализировано современное состояние математического моделирования задач цифровой обработки сигналов. В соответствии с требованиями относительно средств их реализации проанализированы методы построения гиперкомплексных числовых систем и их основные характеристики. В результате анализа методов построения ГЧС выделено принцип удвоения для генерации систем четвертой

размерности, которые являются наиболее приемлемыми при математическом моделировании задач цифровой обработки сигналов.

Построено классы некоммутативных и коммутативных гиперкомплексных числовых систем четвертой размерности путем применения процедуры удвоения Грассмана-Клиффорда. К некоммутативному классу ГЧС относятся системы кватернионов и антикватернионов, а к коммутативному - система квадриплексних чисел. Для этих систем применены методы исследования арифметических и алгебраических характеристик.

Построено обобщенные таблицы Келли для целого класса систем. Это позволяет исследовать основные характеристики не каждой системы отдельно, а сразу для всего класса ГЧС.

Таким образом обобщенно законы определения суммы, произведения, нормы, сопряженных элементов и признаков делителей нуля сразу для целого класса систем, что приводит к уменьшению количества вычислительных операций при исследовании таких структур и расширяет круг ГЧС, которые могут применяться в математическом моделировании при решении практических задач.

Предложено применить метод ассоциированной системы линейных дифференциальных уравнений для построения представлений экспоненциальной, тригонометрических и гиперболических функций в новых классах ГЧС. Полученные выражения для нелинейностей от гиперкомплексные переменной могут применяться по аналогии с нелинейностями от действительных и комплексных переменных, при решении широкого спектра практических задач.

Разработан программный комплекс гиперкомплексных вычислений, с помощью которого исследованы основные алгебраические и функциональные свойства построенных классов ГЧС. Такой пакет процедур позволяет эффективно строить математические модели различных уровней сложности с использованием гиперкомплексного представления данных, уменьшает объем программного кода и время выполнения гиперкомплексных вычислений.

Предложено уменьшить вычислительную сложность математического моделирования задач цифровой обработки сигналов с помощью подхода, основанного на свойствах изоморфного перехода между различными ГЧС. Показано, как повышается эффективность моделирования таких задач путем изоморфного перехода от ГЧС с сильнозаполненимы таблицами умножения базисных элементов в ГЧС, в которых соответствующие таблицы является слабозаполненимы. Таким образом уменьшается количество действительных операций, необходимых для выполнения вышеприведенных задач.

Разработаны программные модули для синтеза задач цифровой обработки сигналов с помощью процедур программного комплекса гиперкомплексных вычислений, что позволяет уменьшить время моделирования таких задач и позволит получить результат быстрее и без выполнения значительного количества арифметических операций

Ключевые слова: гиперкомплексные числовая система, кватернион, антикватернион, обобщенный кватернион, норма, сопряжение, делители нуля, процедура удвоения ГЧС, программный комплекс, изоморфизм, поворот вектора, передаточная функция цифрового фильтра, амплитудно-частотная характеристика фильтра, свертка.